ディジタル信号処理　定期試験問題集
（2015－2018 年）

　毎年の定期試験の問題の構成は以下のようになっている。

第１問　　第１，２章から

第２問　　第３，４章から

第３問　　第５，６，７章から

第４問　　第８，９章から

第５問　　MATLAB のスクリプトを読む問題

ディジタル信号処理試験問題（定期試験）

2017 年 8 月 1 日（火曜日）16 時 20 分 – 17 時 50 分

次の問題 1 から 5 について解答せよ．各問題の解答は，対応する解答用紙のページに記述せよ．各ページの表面が足りないときには，裏面に記入せよ．

1. 一般に，離散時間信号 $x(n)$ の離散時間フーリエ変換 $X\left(e^{j\omega}\right)$ は次のように定義される．

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{1}$$

ここで，$-\pi \le \omega \le \pi$ である．以下の問に答えよ．

(a) 離散時間信号 $x(n)=[-1\ \ -1\ \ -1\ \ \underline{-1}\ \ -1\ \ -1\ \ -1]$ の離散時間フーリエ変換 $X\left(e^{j\omega}\right)$ をできるだけ簡単な式で求めよ※．さらに，その振幅スペクトル $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ を求め，$-\pi \le \omega \le \pi$ の範囲で振幅スペクトルの概形を図示せよ．ただし，図中に $\omega=0$ および $\omega=\pm\pi$ のときの値を明記するとともに，値が 0 になる ω があれば，それらも図中に明記すること．
※注意：等比数列の和の計算を利用して，できるだけ簡単な閉じた形の式を求めること．

(b) 前問と異なる，ある離散時間信号 $x(n)$ について，その離散時間フーリエ変換 $X\left(e^{j\omega}\right)$ が次式で与えられているものとする．

$$X\left(e^{j\omega}\right)=(1+\cos\omega)+(1+\cos\omega)^2 \tag{2}$$

このとき，これに対応する離散時間信号 $x(n)$ を求めよ．
※ヒント： $X\left(e^{j\omega}\right)$ を離散時間フーリエ変換の定義式 (1) の形に変形せよ．

(c) 2 つの離散時間信号 $x_1(n)$ および $x_2(n)$ の離散時間フーリエ変換をそれぞれ $X_1\left(e^{j\omega}\right)$ および $X_2\left(e^{j\omega}\right)$ で表す．これらの間に次の関係が成り立つものとする．

$$X_2\left(e^{j\omega}\right)=(2\cos\omega)\times X_1\left(e^{j\omega}\right) \tag{3}$$

このとき，$x_2(n)$ を $x_1(n)$ を用いて表せ．ただし，できるだけ簡単な式で表すこと．
※ヒント： 離散時間フーリエ変換の定義式 (1) を用いて，時間領域における関係を導出せよ．

2. N 点の離散時間信号 $x(n), n = 0 \sim N-1$ の離散フーリエ変換 $X(k)$ は，次式で定義される．

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, k = 0 \sim N-1 \tag{4}$$

ここで，回転因子 W_N は，$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ である．

また，$X(k)$ の離散フーリエ逆変換 $x(n)$ は，次式で定義される．

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, n = 0 \sim N-1 \tag{5}$$

離散フーリエ変換，離散フーリエ逆変換に関して，以下の問に答えよ．

(a) 次の 8 点の離散時間信号 $x(n)$ の離散フーリエ変換 $X(k)$ を求め，その振幅スペクトル $|X(k)|$ の概形を図示せよ．

$$x(n) = [\underline{1}, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0] \tag{6}$$

(b) 離散フーリエ変換 $Y(k)$ が次式で与えられる離散時間信号 $y(n)$ を離散フーリエ逆変換によって求めよ．(各時刻の値まで求めること．)

$$Y(k) = 4[\underline{0}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1] \tag{7}$$

3. 伝達関数 $H(z)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}z^{-2}+\dfrac{1}{4}z^{-4}$ をもつディジタルフィルタについて以下の問に答えよ．

(a) このフィルタの振幅特性 $|H(e^{j\omega})|$ と位相特性 $\angle H(e^{j\omega})$ を求め，それらを $0\leq\omega\leq\pi$ の範囲で図示せよ．ただし，振幅特性については，図中に $\omega=0$ および $\omega=\pi$ の時の値を明記するとともに，値が 0 および極大になる ω があれば，それらも図中に明記すること．

(b) このフィルタの極と零点を求め，z 平面上に図示せよ．ただし，極を “×” で，零点を “○” で図示すること．

(c) このフィルタの単位インパルス応答 $h(n)$ を求めよ．

(d) このフィルタの構造を遅延素子，加算器，乗算器を用いて図示せよ．

(e) このフィルタの入力が $x(n)=[\underline{2},1,2,-1,2,1,2,-1]$ と与えられているとき，出力 $y(n)$ を求め，これを図示せよ．

4. 所望の周波数応答が次式によって与えられる理想低域フィルタの設計を考える．

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq \alpha\pi \\ 0, & \alpha\pi < |\omega| \leq \pi \end{cases} \tag{8}$$

ここで $0 < \alpha < 1$ である．以下の問題では $\alpha = 0.5$ とする．

(a) $\omega = -\pi \sim \pi$ の範囲で上記の理想低域フィルタの振幅特性 $|H(e^{j\omega})|$ のグラフを描け．

(b) このフィルタの単位インパルス応答 $h(n)$ は，カーディナルサイン関数 sinc を用いて

$$h(n) = \alpha \mathrm{sinc}(\alpha n), \quad n = -\infty \sim \infty \tag{9}$$

と表わせることを示せ．

(c) 単位インパルス応答 $h(n)$ は以下のような対称性をもつことを示せ．

$$h(n) = h(-n), \quad n = -\infty \sim \infty \tag{10}$$

(d) 以下の単位インパルス応答の値を求めよ．

$$h(0), \quad h(\pm 1), \quad h(\pm\infty) \tag{11}$$

ヒント：

- $\mathrm{sinc}(x)$ はカーディナルサイン関数を呼ばれ，$\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ と定義される．
- 単位インパルス応答 $h(n)$ は周波数応答 $H(e^{j\omega})$ の離散時間フーリエ逆変換によって次式で与えられる．

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad n = -\infty \sim \infty \tag{12}$$

5. MATLAB の関数 `bitrev` を下のように定義する．この関数は，(5) から (13) 行によって再帰的な方法を用いてベクトル `x` に対してビット逆順のベクトル `X` を返す.（補足：`~=` は 両辺の値が等しくないときに 1, 等しいときに 0 を与える比較演算子．`error` はメッセージを表示して呼び出し側に強制的に戻る関数.）

```
function [X] = bitrev(x)
N = length(x);                                  %(1)
if 2^fix(log2(N)) ~= N                          %(2)
    error('Length of x is not a power of 2');   %(3)
end                                             %(4)
if N == 1                              %(5)
    X = x;                             %(6)
else                                   %(7)
    m = 0:N/2-1;                       %(8)
    xeven = x(2*m + 1);                %(9)
    xodd  = x(2*m+1 + 1);              %(10)
    X = [bitrev(xeven) bitrev(xodd)];  %(12)
end                                    %(13)
```

次の (a)-(d) の問いに答えよ．

(a) 関数 `bitrev` における (1) から (4) 行の役割を説明せよ．例えば，`x = [0 1 2 3]` および `x = [0 1 2]` の場合について考えてみよ．

(b) 以下のプログラムを実行したとき，`X` はどのようなベクトルとなるか？（ベクトルの要素を示せ）

```
x = [5];
X = bitrev(x)
```

(c) 以下のプログラムを実行したとき，関数 `bitrev` はどのような応答をするか？

```
y = [6 6 6];
Y = bitrev(y)
```

(d) 以下のプログラムを実行したとき，`V` はどのようなベクトルとなるか？（ベクトルの要素を示せ）

```
v = [0 1 2 3 4 5 6 7];
V = bitrev(v)
```

ディジタル信号処理試験問題（定期試験）

2016 年 8 月 1 日（月曜日）16 時 20 分 – 17 時 50 分

次の問題 1 から 5 について解答せよ．各問題の解答は，対応する解答用紙のページに記述せよ．各ページの表面が足りないときには，裏面に記入せよ．

1. 一般に，離散時間信号 $x(n)$ の離散時間フーリエ変換 $X\left(e^{j\omega}\right)$ は次のように定義される．

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{1}$$

ここで，$-\pi \leq \omega \leq \pi$ である．

さて，次式で定義される離散時間信号 $x(n)$ を考える．

$$x(n)=\begin{cases} a^n\cos(\theta n), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{2}$$

ここで，a および θ は実数である．このとき，以下の問に答えよ．

(a) 式 (2) において $a=0.5$ および $\theta=0$ としたときの離散時間信号 $x(n)$ の離散時間フーリエ変換 $X\left(e^{j\omega}\right)$ をできるだけ簡単な式で求めよ※．さらに，その振幅スペクトル $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ を求め，$-\pi \leq \omega \leq \pi$ の範囲で振幅スペクトルの概形を図示せよ．ただし，図中に $\omega=0$ および $\omega=\pm\pi$ のときの値を明記すること．

※注意 : 等比数列の和の計算を利用して，できるだけ簡単な，閉じた形の式（無限個の和を含まない式）を求めること．

(b) 式 (2) において $a=0.99$ および $\theta=\frac{\pi}{2}$ としたときの離散時間信号 $x(n)$ の離散時間フーリエ変換 $X\left(e^{j\omega}\right)$ をできるだけ簡単な式で求めよ※．さらに，$\omega=\frac{\pi}{2}$ および $\omega=-\frac{\pi}{2}$ における $X\left(e^{j\omega}\right)$ の値を求めよ．

※注意： $\cos(\theta n)$ が複素指数関数の和によって表現できることを利用せよ．前問 (a) と同様に，できるだけ簡単な，閉じた形の式を求めること．

(c) 任意の離散時間信号 $x(n)$ を用いて，新たな離散時間信号 $y(n)$ を次式で定義する．

$$y(n)=x(n)+x(n-1)+x(n-2) \tag{3}$$

このとき，$y(n)$ の離散時間フーリエ変換 $Y\left(e^{j\omega}\right)$ を $x(n)$ の離散時間フーリエ変換 $X\left(e^{j\omega}\right)$ を用いて，できるだけ簡潔に表せ．

※注意 : 本問では，離散時間信号 $x(n)$ は式 (2) で定義される信号に制限されるものではなく，一般的な信号であり，その離散時間フーリエ変換が $X\left(e^{j\omega}\right)$ として与えられているとする．

2. N 点の離散時間信号 $x(n), n = 0 \sim N-1$ の離散フーリエ変換 $X(k)$ は，次式で定義される．

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, k = 0 \sim N-1 \tag{4}$$

ここで，回転因子 W_N は，$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ である．

また，$X(k)$ の離散フーリエ逆変換 $x(n)$ は，次式で定義される．

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, n = 0 \sim N-1 \tag{5}$$

離散フーリエ変換，離散フーリエ逆変換に関して，以下の問に答えよ．

(a) 次の 8 点の離散時間信号 $x(n)$ の離散フーリエ変換 $X(k)$ を求め，その振幅スペクトル $|X(k)|$ の概形を図示せよ．

$$x(n) = [\underline{0}, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$$

(b) 離散フーリエ変換 $Y(k)$ が次式で与えられる離散時間信号 $y(n)$ を離散フーリエ逆変換によって求めよ（各時刻の値まで求めること）．

$$Y(k) = 2[\underline{0}, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0]$$

3. 次の極と零点をもつ因果的ディジタルフィルタについて以下の問に答えよ．

極： $p_k = 0, \quad k = 1, 2, 3$

零点： $z_1 = j, \ z_2 = 1, \ z_3 = -j$

このフィルタの極と零点について，z 平面上に図示せよ．ただし，極を "$\times$" で，零点を "$\circ$" で図示すること．

(a) このフィルタの伝達関数 $H(z)$ を求めよ．

(b) このフィルタの振幅特性 $|H(e^{j\omega})|$ と位相特性 $\angle H(e^{j\omega})$ を求め，それらを $0 \leq \omega \leq \pi$ の範囲で図示せよ．ただし，振幅特性については，図中に $\omega = 0$ および $\omega = \pi$ の時の値を明記するとともに，値が 0 になる ω があれば，それらも図中に明記すること．

(c) このフィルタの単位インパルス応答 $h(n)$ を求めよ．

(d) このフィルタの構造を遅延素子，加算器，乗算器を用いて図示せよ．

(e) このフィルタの入力が $x(n) = [\underline{2}, 0, 2, 0, 2, 0, 2, 0]$ と与えられているとき， 出力 $y(n)$ を計算し，図示せよ．

4. 所望の周波数応答が次式によって与えられる理想低域フィルタの設計を考える．

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le \alpha\pi \\ 0, & \alpha\pi < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

ここで $0 < \alpha < 1$ である．

(a) 例えば, $\alpha = 0.25$ のとき，$\omega = -\pi \sim \pi$ の範囲で上記の理想低域フィルタの振幅特性 $|H(e^{j\omega})|$ のグラフを描け.

(b) このフィルタの単位インパルス応答 $h(n)$ は，カーディナルサイン関数 sinc を用いて

$$h(n) = \alpha \mathrm{sinc}(\alpha n), \quad n = -\infty \sim \infty$$

と表わせることを示せ.

(c) $\alpha = 0.25$ のとき，単位インパルス応答 $h(0), h(1), h(2), h(-1), h(-2)$ の値を求めよ.（注： $h(0)$ の値を求める際には注意せよ）

(d) $\alpha = 0.25$ のとき，$n = -10 \sim 10$ の範囲で単位インパルス応答 $h(n)$ の概形（おおよその形）を図示せよ.（注：　単位インパルス応答がカーディナルサイン関数で表わされること，さらに $h(0)$ の値および $h(n) = 0$ となる時刻に留意して概形を描くこと）

ヒント：

- $\mathrm{sinc}(x)$ はカーディナルサイン関数を呼ばれ，$\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ と定義される.
- 単位インパルス応答 $h(n)$ は周波数応答 $H(e^{j\omega})$ の離散時間フーリエ逆変換によって次式で与えられる.

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad n = -\infty \sim +\infty \tag{6}$$

5. 下に示す MATLAB のスクリプトの実行について (a)-(e) の問いに答えよ．

   (a) (2) 行の n の要素を求めよ．

   (b) (3) 行の h の要素を求めよ．

   (c) (4) 行の w の要素を求めよ．

   (d) (5) 行の wl はどのような値か．

   (e) (15)-(20) 行を実行すると，Figure No. 2 のウィンドウにはどのようなグラフが表示されるか．その概略を図示せよ．(グラフの曲線は省略してもよいが、グラフタイトル、縦軸、横軸に注意して、概形を図示せよ）

```
clear all; close all;                    %(1)
n = 0 : 1 : 4                            %(2)
h = (1/2) .^n                            %(3)
w = -3.14 : 1 : 3.14                     %(4)
wl= length(w)                            %(5)

H = freqz(h,1,w);                        %(6)
magH = abs(H);                           %(7)
argH = angle(H);                         %(8)

figure(1);                               %(9)
plot(w,magH);                            %(10)
title('周波数振幅特性 ');                %(11)
axis([-pi pi 0 2]);                      %(12)
xlabel('周波数  \omega [rad] ');         %(13)
ylabel('振幅特性 |H(e^{j\omega})| '); %(14)

figure(2);                               %(15)
plot(w,argH);                            %(16)
title('周波数振幅特性 ');                 %(17)
axis([-pi pi -pi pi]);                   %(18)
xlabel('周波数 \omega [rad] ');          %(19)
ylabel('位相 \theta [rad] ');            %(20)
```

ディジタル信号処理試験問題（定期試験）

2015 年 7 月 27 日（月曜日）16 時 20 分 – 17 時 50 分

次の問題 1 から 5 について解答せよ．各問題の解答は，対応する解答用紙のページに記述せよ．各ページの表面が足りないときには，裏面に記入せよ．

1. 離散時間信号 $x(n)$ の離散時間フーリエ変換 $X\left(e^{j\omega}\right)$ は次のように定義される．

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{1}$$

ここで，$-\pi \leq \omega \leq \pi$ である．以下の問に答えよ．

(a) 離散時間信号 $x(n)$ が実数であるとき，振幅スペクトル $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ は ω の偶関数であり，位相スペクトル $\angle X\left(e^{j\omega}\right)$ は ω の奇関数であることを証明せよ．すなわち，$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|X\left(e^{-j\omega}\right)\right|$ および $\angle X\left(e^{j\omega}\right)=-\angle X\left(e^{-j\omega}\right)$ を証明せよ．

(b) 離散時間信号 $x(n)=[1\ \underline{1}\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$ の離散時間フーリエ変換 $X\left(e^{j\omega}\right)$ をできるだけ簡単な表現で求めよ．さらに，その振幅スペクトル $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ を求め，$-\pi \leq \omega \leq \pi$ の範囲で図示せよ．ただし，図中に $\omega=0$ および $\omega=\pm\pi$ のときの値を明記するとともに，値が 0 になる ω があれば，それらも図中に明記すること．
※ヒント：等比数列の和の計算を利用して式をできるだけ簡単化すること．

(c) ある離散時間信号 $x(n)$ の離散時間フーリエ変換 $X\left(e^{j\omega}\right)$ が次式で与えられているものとする．

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left(1-0.1e^{-j\omega}\right)\left(1-0.2e^{-j\omega}\right)} \tag{2}$$

このとき，これに対応する離散時間信号 $x(n)$ を求めよ．
※ヒント：部分分数展開と等比数列の和の計算を利用して，$X\left(e^{j\omega}\right)$ を離散時間フーリエ変換の定義式 (1) の形に変形せよ．

2. N 点の離散時間信号 $x(n), n = 0 \sim N-1$ の離散フーリエ変換 $X(k)$ は，次式で定義される．

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, k = 0 \sim N-1 \tag{3}$$

ここで，回転因子 W_N は，$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ である．

また，$X(k)$ の離散フーリエ逆変換 $x(n)$ は，次式で定義される．

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, n = 0 \sim N-1 \tag{4}$$

離散フーリエ変換，離散フーリエ逆変換に関して，以下の問に答えよ．

(a) 次の 8 点の離散時間信号 $x(n)$ の離散フーリエ変換 $X(k)$ を求め，その振幅スペクトル $|X(k)|$ の概形を図示せよ．

$$x(n) = \frac{1}{2}[\underline{0}, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0]$$

(b) 離散フーリエ変換 $Y(k)$ が次式で与えられる離散時間信号 $y(n)$ を離散フーリエ逆変換によって求めよ．(各時刻の値まで求めること．)

$$Y(k) = 4[\underline{1}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

3. 次の極と零点をもつディジタルフィルタについて以下の問に答えよ．

極： $p_k = 0, \quad k = 0, 1, 2$

零点： $z_1 = -1, \; z_2 = j, \; z_3 = -j$

(a) このフィルタの極と零点について，z 平面上に図示せよ．ただし，極を “×” で，零点を “○” で図示すること．

(b) このフィルタの伝達関数 $H(z)$ を求めよ．

(c) このフィルタの振幅特性 $|H(e^{j\omega})|$ と位相特性 $\angle H(e^{j\omega})$ を求め，それらを $0 \leq \omega \leq \pi$ の範囲で図示せよ．ただし，振幅特性については，図中に $\omega = 0$ および $\omega = \pi$ の時の値を明記するとともに，値が 0 になる ω があれば，それらも図中に明記すること．

(d) このフィルタの単位インパルス応答 $h(n)$ を求めよ．

(e) このフィルタの構造を遅延素子，加算器，乗算器を用いて図示せよ．

(f) このフィルタの入力が $x(n) = [\underline{2}, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1]$ と与えられているとき， 出力 $y(n)$ を計算し，図示せよ．

4. 所望の周波数応答が次式によって与えられる理想低域フィルタの設計を考える．

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le \alpha\pi \\ 0, & \alpha\pi < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

ここで $0 < \alpha < 1$ である．

(a) 例えば, $\alpha = 0.5$ のとき，$\omega = -\pi \sim \pi$ の範囲で上記の理想低域フィルタの振幅特性 $|H(e^{j\omega})|$ のグラフを描け．

(b) このフィルタの単位インパルス応答 $h(n)$ は

$$h(n) = \alpha \mathrm{sinc}(\alpha n)$$

となることを示せ．

(c) $\alpha = 0.5$ のとき，単位インパルス応答 $h(0), h(1), h(2), h(-1), h(2)$ の値を求めよ．

(d) $\alpha = 0.5$ のとき，$n = -10 \sim 10$ の範囲で単位インパルス応答 $h(n)$ の概形を図示せよ（単位インパルス応答がカーディナルサイン関数で表わされること，および $h(n) = 0$ となる時刻に留意して概形を描くこと．$h(n)$ の正確な数値は不要である）

ヒント：

- $\mathrm{sinc}(x)$ はカーディナルサイン関数を呼ばれ，$\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ と定義される．
- 単位インパルス応答 $h(n)$ は周波数応答 $H(e^{j\omega})$ の離散時間フーリエ逆変換によって次式で与えられる．

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad n = -\infty \sim +\infty \tag{5}$$

5. 次に MATLAB のスクリプトを示す．(a), (b) の問に答えよ．

```
h = [1 2 1]                                         %(1)
x = [1 1 1 1 1]                                     %(2)
hl = length(h)                                      %(3)
xl = length(x)                                      %(4)
hz = [h zeros(1,xl-1)]                              %(5)
xz = [x zeros(1,hl-1)]                              %(6)
yl = hl+xl-1                                        %(7)
y = zeros(1,yl)                                     %(8)
for n = 0:yl-1                                      %(9)
   for k = 0:n                                      %(10)
      y(n+1) = y(n+1)+hz(k+1)*xz(n-k+1)             %(11)
   end                                              %(12)
end                                                 %(13)
```

(a) 上記の MATLAB のスクリプトを実行したときの以下の各値を示せ．

i. (3) 行の `hl`

ii. (5) 行の `hz`

iii. (8) 行の `y`

iv. (11) 行の全実行回数

v. 実行終了後の `y`

(b) 上記の MATLAB のスクリプトはどのような信号処理を行っているか？以下の中から最も適当なものを選べ．

(1) 信号 x の離散フーリエ変換
(2) 信号 h の高速フーリエ変換
(3) 入力 x に対する単位インパルス応答 h によるたたみこみ
(4) 入力 x に対する単位インパルス応答 h による FIR フィルリング
(5) 入力 x に対する単位インパルス応答 h による IIR フィルタリング

ディジタル信号処理試験問題（定期試験）

2014 年 8 月 1 日（金曜日）8 時 50 分 – 10 時 20 分

次の問題 1 から 5 について解答せよ．各問題の解答は，対応する解答用紙のページに記述せよ．各ページの表面が足りないときには，裏面に記入せよ．

1. 離散時間信号$x(n)$の離散時間フーリエ変換$X(e^{j\omega})$は次のように定義される．

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \qquad (1)$$

ここで，$-\pi \leq \omega \leq \pi$である．以下の問に答えよ．

(a) 離散時間信号$x(n)$が実数であり，かつ，nの偶関数である（すなわち，$x(-n) = x(n)$が成り立つ）とする．このとき，離散時間フーリエ変換$X(e^{j\omega})$も実数であり，かつ，ωの偶関数であることを証明せよ．

(b) ある離散時間信号$x(n)$の離散時間フーリエ変換$X(e^{j\omega})$が次式で与えられているものとする．

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1-0.5e^{-j\omega}}$$

このとき，これに対応する離散時間信号$x(n)$を求めよ．

※ヒント：$X(e^{j\omega})$を離散時間フーリエ変換の定義式(1)の形に変形せよ．

※ヒント：等比数列の和の計算を利用するとよい．

(c) 離散時間信号$x(n) = 0.5^{|n|}$の離散時間フーリエ変換$X(e^{j\omega})$をできるだけ簡単な表現で求めよ．さらに，その振幅スペクトル$\left|X(e^{j\omega})\right|$と位相スペクトル$\angle X(e^{j\omega})$を求め，それらを$-\pi \leq \omega \leq \pi$の範囲で図示せよ．ただし，振幅スペクトルについては，図中に$\omega = 0$および$\omega = \pm\pi$のときの値を明記するとともに，値が 0 になるωがあれば，それらも図中に明記すること．

※ヒント：等比数列の和の計算を利用して式を簡単化すること．

2. N 点の離散時間信号 $x(n), n = 0 \sim N-1$ の離散フーリエ変換 $X(k)$ は，次式で定義される．

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, k = 0 \sim N-1 \tag{1}$$

ここで，回転因子 W_N は，$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ である．

また，$X(k)$ の離散フーリエ逆変換 $x(n)$ は，次式で定義される．

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, n = 0 \sim N-1 \tag{2}$$

離散フーリエ変換，離散フーリエ逆変換に関して，以下の問に答えよ．

(a) 次の 8 点の離散時間信号 $x(n)$ の離散フーリエ変換 $X(k)$ を求め，その振幅スペクトル $|X(k)|$ を図示せよ．

$x(n) = [\underline{1}, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$

(b) 離散フーリエ変換 $Y(k)$ が次式で与えられる離散時間信号 $y(n)$ を離散フーリエ逆変換によって求めよ．

（式だけでなく数値まで示すこと．）

$Y(k) = [\underline{1}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$

3. 単位インパルス応答 $h(n) = \left[\underline{-\frac{1}{2}}, 1, -\frac{1}{2}\right]$ をもつディジタルフィルタについて次の問に答えよ．

(a) このフィルタの構造を遅延素子，加算器，乗算器を用いて図示せよ．

(b) このフィルタの入力が $x(n) = [\underline{6}, 7, 3, 5]$ と与えられているとき， 出力 $y(n)$ を計算し，図示せよ．

(c) このフィルタの伝達関数 $H(z)$ を求めよ．

(d) このフィルタの振幅特性 $|H(e^{j\omega})|$ と位相特性 $\angle H(e^{j\omega})$ を求め，それぞれ図示せよ．

(e) 位相特性 $\angle H(e^{j\omega})$ を周波数 ω で微分し，符号を反転して得られる量は群遅延 $\tau_g(\omega)$ と呼ばれる．このフィルタの群遅延 $\tau_g(\omega)$ を求めよ．

(f) このフィルタの極と零点を求め，z 平面上に図示せよ．ただし，極を “×” で，零点を “○” で図示すること．

4. 周波数応答が次式によって与えられる理想低域フィルタについて考える．

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq \alpha\pi \\ 0, & \alpha\pi < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

ここで $0 < \alpha < 1$ である．

(a) 例えば, $\alpha = 0.5$ のとき，上記の理想低域フィルタの振幅特性 $|H(e^{j\omega})|$ のグラフを描け．

(b) このフィルタの単位インパルス応答 $h(n)$ は

$$h(n) = \alpha \mathrm{sinc}(\alpha n)$$

となることを示せ．

ヒント：

- $\mathrm{sinc}(x)$ はカーディナルサイン関数を呼ばれ，$\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ と定義される．
- 単位インパルス応答 $h(n)$ は周波数応答 $H(e^{j\omega})$ の離散時間フーリエ逆変換によって次式で与えられる．

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad n = -\infty \sim +\infty \tag{3}$$

(c) $\alpha = 0.5$ のとき，単位インパルス応答 $h(n)$ の値を $n = -2, -1, 0, 1, 2$ の範囲で求めて，単位インパルス応答を図示せよ．

5. 次に示す MATLAB のプログラムを実行したとき，(a), (b), (c) の問に答えよ．

```
N = 8;
n = 0:N-1;
a = 0.5;
x = a.^n;

subplot(2,2,1);                               %(1)
stem(n,x);
axis([0 length(n) min(x) max(x)]);
xlabel('Time n'); ylabel('x(n)');             %(2)

w = -pi:0.01:pi;                                                        %(3)
Xejw = freqz(x,1,w);
subplot(2,2,2);
maxX = max(abs(Xejw));
plot(w,abs(Xejw));
axis([-pi pi 0 maxX]);
xlabel('Frequency \omega [rad]'); ylabel('|X(e^{j\omega})|'); %(4)
```

(a) n と x はどのような値をもっているか？

(b) (1) から (2) の行の実行によって表示されるグラフの概形について説明せよ.（説明文とともに図を用いてもよい）

(c) (3) から (4) の行の実行によってどのような計算と表示が行われるかを説明せよ（説明文とともに図を用いてもよい）